Контрольная работа № 1
по теме «Устойчивость»

(образец, сентябрь 2019)

Задача 1.1. Исследуйте на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$

Решение:
Видно, что $(x = 0, y = 0)$ является решением системы. После линеаризации вокруг положения $x = 0, y = 0$ матрица системы примет вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+3) - 2 = \lambda^2 + 4\lambda + 1.$$

Так как все коэффициенты полинома положительны, он имеет корни с отрицательной вещественной частью. Значит тривиальное решение $x = 0, y = 0$ асимптотически устойчиво.

Задача 1.2. Найдите все положения равновесия системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

Определите, какие устойчивы, а какие — нет.
Решение:
Найдем положения равновесия системы из условия $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$.

$$\begin{cases} 0 = (x-1)(y-1), \\ 0 = xy - 2, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Обозначим $f_1(x, y) = (x-1)(y-1)$, $f_2(x, y) = xy - 2$ правые части системы. Вычислим матрицу производных

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 & x-1 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

1) Случай $(x^0 = 1;\ y^0 = 2)$.

$$A|_{x=1,y=2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2.$$

Так как у полинома все корни положительны, решение $x = 1$, $y = 2$ не является асимптотически устойчивым. 2) Случай $(x^0 = 2;\ y^0 = 1)$.

$$A|_{x=2,y=1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 1.$$

Так как у полинома коэффициенты разных знаков, решение $x = 2$, $y = 1$ не является асимптотически устойчивым.

Задача 1.3. Исследуйте, при каких значениях параметров a и b нулевое решение системы асимптотически устойчиво:

$$ax^{IV} + \dddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} + bx = 0.$$

Решение:
Характеристический полином имеет вид

$$a\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + b = 0.$$

Коэффициент при старшей степени равен a. Он должен быть положителен. В противном случае, у полинома будут коэффициенты разного знака. Матрицу Гурвица запишем в следующей форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & b \end{pmatrix}.$$

Главные угловые миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1 - a, \quad \Delta_3 = 1 - a - b, \quad \Delta_4 = \Delta_3 b.$$

Условие положительности главных угловых миноров матрицы Гурвица эквивалентно следующим неравенствам:

$$0 < a < 1, \quad 0 < b < 1 - a.$$

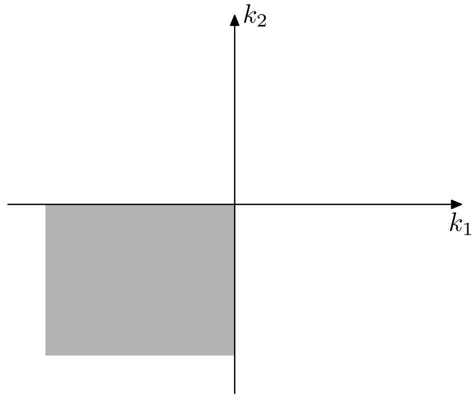
Задача 1.4. На плоскости параметров k_1, k_2 изобразите область асимптотической устойчивости и область устойчивости с запасом 1 тривиального решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + k_2 x_2. \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k_1 \\ 1 & k_2 \end{pmatrix}, \quad |A - \lambda E| = (k_2 - \lambda)(-\lambda) - k_1 = \lambda^2 - k_2\lambda - k_1$$

Асимптотическая устойчивость $\Leftrightarrow k_1 < 0, k_2 < 0$.



Найдем условия устойчивости с запасом $\alpha = 1$.

$$A_y = \begin{pmatrix} 1 & k_1 \\ 1 & k_2+1 \end{pmatrix}, \quad |A_y - \lambda E| = (k_2+1-\lambda)(1-\lambda) - k_1 = \lambda^2 - (k_2+2)\lambda + (k_2+1-k_1)$$

Асимптотическая устойчивость с запасом $\alpha = 1 \Leftrightarrow k_2 < -2, k_2 > k_1 - 1$.